Gabių vaikų ugdymo mokymo priemonių dokumentas parengtas, įgyvendinant ES lėšomis finansuojamą projektą „Gabių vaikų ugdymo efekytyvumo didinimas švietimo sistemoje“
(nr. VP1-2.3-ŠMM-06-K-01-001)

4.Matricos transponavimas (matrix transposition,conjugation,conjungating)

Matrica gauta iš pradinės pakeičiant kiekvieną jos eilutę (stulpelį) stulpeliu (eilute) su tuo pačiu numeriu vadinama šios matricos transponuota matrica žymimaA^T (A „laipsniu“ T) (kartais šią operaciją žymi kaip išvestinę t.y. $A^{/} = A^T$)

Tranpozicijos savybės:

4.1. $(A+B)^T = A^T + B^T$,

4.2. $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$,

4.3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$,

4.4. $(A^T)^T = A$

Pvz.3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Determinantas (kvadratinių matricų matricinė funkcija) $\det A_{n\times n} = |A|$

Bendras apibrėžimas yra sudėtingas todėl paprastai pateikiamas tik skaičiavimo algoritmas (Laplaso skleidinys)

1. $\det A_{2\times 2} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Pvz.4. $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 5 \cdot 4 = 6 - 20 = -14$.

Aukštesnės eilės determinantams skaičiuoti siūloma rekurentinė skleidimo pagal fiksuotą eilutę arba stulpelį taisyklė.

$\det A_{n\times n} = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ j-const.}}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ i-const.}}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$. Čia M_{ij} -elemento a_{ij} minoras t.y. matricos, gautos iš pradinės išbraukus i-tąją eilutę ir j-tąjį stulpelį, determinantas.

Pastaba.Egzistuoja ir kitos determinantų skaičiavimo taisyklės, bet, bendru atveju, jos sunkiai pritaikomos.

Pvz.5.

$$\begin{vmatrix}1 & -4 & 5\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 4\end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix} + (-4)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix} = 1\cdot(8-1)+4\cdot(0-3)+5\cdot(0-6)$$

$$= 7-12-30=-35.$$

Kartu šiu šia taisykle pasinaudojama determinanto savybėmis (elementariaisiais determinanto pertvarkiais):

1. Jei matricos eilutės(stulpelio) visi elementai lygūs 0 tai šios matricos determinantas lygus nuliu.

2.Sukeitus dvi eilutes(stulpelius) vietomis determinantas keičia ženklą.

3.Pastovų eilutės(stulpelio) daugiklį galima iškelti prieš determinanto ženklą.

Pvz.6.

$$\begin{vmatrix}6 & 12\\ 24 & 36\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}24 & 36\\ 6 & 12\end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}36 & 24\\ 12 & 6\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}6 & 12\\ 24 & 36\end{vmatrix} = 6\cdot\begin{vmatrix}6 & 12\\ 4 & 6\end{vmatrix} = 6\cdot 6\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\end{vmatrix} = 36\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix} = 72\cdot(3-4) = -72.$$

Pastebėsime,kad šios savybės svarbaus vaidmens skaičiuojant determinantą nevaidina.

Akivaizdu, kad $\det(\alpha\cdot A_{n\times n}) = \alpha^n\cdot\det A$ (Šiuo atveju užrašas $|\alpha\cdot A| = \alpha^n\cdot|A|$ truputi klaidina žmones kuriems jis asocijuojasi su $|-2|=2$, taigi kiekvienas pažymėjimas turi savo pliusų ir minusų $|A|$-trumpiau,detA-nesukelia dviprasmybių su kita pažymėjimo $|A|$ prasme).

4.Jeigu matricos fiksuotos eilutės(stulpelio) elementus padaugintus iš to paties skaičiaus pridėsime prie kitos fiksuotos eilutės(stulpelio) atatinkamų elementų tai determinantas nesikeis.

Pvz.**7**.

$$\begin{vmatrix}1 & -4 & 5\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 4\end{vmatrix}\begin{matrix}\cdot(-3)\\ \downarrow\\ \lrcorner +\end{matrix} = \begin{vmatrix}1 & -4 & 5\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 13 & -11\end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 13 & -11\end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-4 & 5\\ 13 & -11\end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-4 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix} =$$

Čia skleidėme pagal pirmą stulpelį.Akivaizdu, kad skaičiuoti determinantų prie nulinių elementų neverta ,nes sandauga vis tiek bus nulinė t.y. iš karto galėjome rašyti

Gabių vaikų ugdymo mokymo priemonių dokumentas parengtas,
įgyvendinant ES lėšomis finansuojamą projektą „Gabių vaikų
ugdymo efekytyvumo didinimas švietimo sistemoje“
(nr. VP1-2.3-ŠMM-06-K-01-001)

$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 13 & -11 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 1(-22-13) = -35$. (Gavome tą patį rezultatą kaip ir pvz.5)

Šia savybe tenka labai plačiai naudotis skaičiuojant aukštesnės eilės determinantus norint fiksuotoje eilutėje (stulpelyje) gauti kuo daugiau nulinių elementų ir po to skaičiuoti šį determinantą skleidžiantą „nuline“ eilute(stulpeliu).

5. Determinantas turintis dvi proporcingas eilutes(stulpelius) lygus nuliui.

6. Jei determinanto kurios nors eilutės(stulpelio) elementai yra dviejų dėmenų sumos, tai tas determinantas lygus sumai dviejų determinantų, kurių viename minėtą eilutę(stulpelį) sudaro pirmieji dėmenys, kitame antrieji, o likusios eilutės(stulpeliai) visuose determinantuose vienodos(vienodi).

7. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1\ n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3\ n-1} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1\ n-1} & a_{n-1\ n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \cdots \cdot a_{n-1\ n-1} \cdot a_{nn} .$$

8. $\det(A_{n\times n} \cdot B_{n\times n}) = \det A \cdot \det B$ t.y. $|AB| = |A| \cdot |B|$,

9. $\det A^T = \det A$ t.y. $|A^T| = |A|$.

Kvadratinės matricos kurių determinantai lygūs 0 vadinamos **išsigimusiomis (singular matrix).** Matricos kurių determinantas nelygus nuliui vadinamos neišsigimusiomis arba **reguliariomis (non-singular (regular) matrix).**